J. Jpn. Soc. Soil Phys.
土壌の物理性
No. 106, p. 47～60（2007）

古典を読む

Y. Mualem 著「不飽和多孔質体の透水係数を推定する新たなモデルについて」ならびに M. Th. van Genuchten 著「不飽和土壌の透水係数を推定する閉形式解について」

小杉　賢一朗*

Reviewing classical studies in soil physics
"A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media"
By Y. Mualem
Water Resources Research, Vol. 12, No. 3, 513–522 (1976)
and
"A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils"
By M. Th. van Genuchten
Soil Science Society of America Journal, Vol. 44, No. 5, 892–898 (1980)

Ken'ichirou KOSUGI*

* Graduate School of Agriculture, Kyoto Univ., Kyoto, 606–8502, Japan

Key words : Water retention curve, unsaturated hydraulic conductivity, pore size distribution, Mualem-van Genuchten model

1. はじめに

土壌の体積含水率θとマトリックポテンシャル水頭Ψの関係で表される水分特性曲線は，土壌の保水性を表現するものである。一方土壌の透水性は，飽和透水係数K_sと，θやΨの関数である不飽和透水係数Kで表現される。これら土壌の保水性・透水性は，土壌中の不飽和水分移動を解析する際に不可欠なものである。また，土壌中の熱や溶質やガスの移動にも深く関係し，地下水や河川の水質形成，蒸発散，植物の生育，生態系の物質循環など，様々な現象に大きな影響を及ぼしている。

実測された土壌の保水性や透水性のデータを数式モデルで表現することには，多くの利点がある。まず，離散的な測定データを連続的な関数で内挿することができる。これによって，任意のΨに対するθやKを求めたり，その逆を行うことが容易になるため，不飽和水分移動を表現するRichards式の数値解析を行う上で非常に便利である。第2の利点として，土壌により異なる保水性・透水性の特徴を，モデル中のパラメータの違いとして表現することが可能となる。これにより，例えば，保水性や透水性の時間的・空間的な変動を，パラメータの変動として定量的に解析することができる（例えば，Hendrayanto *et al.*, 1999）。また，手間・時間・経費がかかる測定を行う代わりに，より簡便な手法でパラメー

* 京都大学農学研究科　〒606–8502 京都市左京区北白川追分町
キーワード : 水分特性曲線，不飽和透水係数，孔隙径分布，Mualem-van Genuchten モデル

タを特定することができれば，効率的に保水性・透水性を調べることが可能となる。現在，不飽和水分移動に関する計測データから逆解析によりパラメータを算定する方法（inverse method）や，土性・乾燥密度・有機物含有量などの情報を入力としてパラメータを推定する関数（pedotransfer function）が精力的に研究されている（例えば，van Genuchten *et al.,* 1999）。

第3の利点として，関数化した水分特性曲線から，不飽和透水係数を表現する関数を導出できることがある。不飽和透水係数の計測には，多くの労力と時間がかかるため，孔隙の連結性や屈曲度などの微視的構造をモデル化し，孔隙径分布から不飽和透水係数を推定する試みが数多く行われてきた。この微視的構造モデルに，水分特性曲線関数から導かれる孔隙径分布関数を代入することによって，不飽和透水係数関数を導くことができる。得られた不飽和透水係数関数は，水分特性曲線関数と共通のパラメータを持ち，水分特性曲線と連動して曲線形状を変化させる。この種の「水分特性曲線–不飽和透水係数連結モデル」は，少ないパラメータで保水性と透水性の両方を表現することができるため，近年では数式モデルの主流となっている。

現在最も広く利用されている水分特性曲線–不飽和透水係数連結モデルは，van Genuchten（1980）がMualem（1976）の微視的構造モデルを用いて開発したMualem-van Genuchtenモデルである。このモデルが如何に広く普及しているかは，Mualem（1976）とvan Genuchten（1980）の被引用回数に端的に示されている。Koutsoyiannis and Kundzewicz（2007）が，Institute for Scientific Information, Scopus, Google Scholarの各データベースを用いて調査した結果では，Mualem（1976）の被引用回数がそれぞれ1,003，773，747回，van Genuchten（1980）の被引用回数がそれぞれ2,604，2,276，1,054回となっている。ちなみに，蒸発散分野でよく知られたPenman（1948）の被引用回数はそれぞれ1,556，778，769回であることから，Mualem-van Genuchtenモデルが如何に多くの研究で利用されているかがわかる。Mualem（1976）とvan Genuchten（1980）は，シリーズ「古典を読む」でとりあげるには若干新しいものではあるが，以上のように非常に広く引用されていることから，本稿で紹介することにした。

Mualem（1976）より昔には，土壌物理学（例えば，Childs and Collis-George, 1950；Millington and Quirk, 1961）や石油工学（例えば，Burdine, 1953；Wyllie and Gardner, 1958）などの異なる分野において，それぞれ個別の土壌を対象として，微視的構造モデルの開発・検証が試みられていた。このため，異なるモデル間での適合性の比較は十分には行われていなかった。そこでMualemは，新たなモデルの開発を行い，文献から収集した多くの土壌に関するデータを用いて，開発したモデルを既往モデルと横並びで評価した。一方van Genuchten（1980）は，当時，不飽和土壌中の水分移動や溶質移動の数値解析が盛んになりつつあったことを背景として，数値計算との相性が良く，かつ適合性の高い水分特性曲線–不飽和透水係数結合モデルの開発が必要と判断し，この研究に取り組んだ。実のところvan Genuchtenは，1980年にSSSAJ誌でこのモデルを発表する以前に，同じ研究内容をプリンストン大学の研究レポートにまとめている（van Genuchten, 1978）。その当時は単に「溶質移動の数値計算をするときに便利な関数を見つけた」程度の思いしかなく，独立した論文として投稿するつもりは無かったそうである。その後周囲からモデルの有用性を指摘され，改めてまとめ直したものが，結果的に，広く引用される論文となったのである。なお余談であるが，プリンストン大学の研究レポートは，彼のニックネームであるRienの名で書かれている。

本稿では，Mualem-van Genuchtenモデルの誘導過程が理解できるように，Mualem（1976）とvan Genuchten（1980）の要点をまとめた。また最後の部分では，van Genuchtenの水分特性曲線関数の表記方法に関する筆者の考えと，その後の関連した研究の成果を少し付け加えた。研究の性質上，多少数式が多くなってしまったが，これまでMualem-van Genuchtenモデルを使用した経験が有る人や，これから使用予定の人に，モデルの背景や性質が伝われば幸いである。

2. Mualemの不飽和透水係数推定モデル

2.1 土壌孔隙径分布関数と有効飽和度

Mualem（1976）では，まず最初に，体積割合に基づいた土壌孔隙半径rの分布関数$f(r)$が次式で定義された〔原著(5)式〕。

$$f(r)\equiv d\theta/dr \qquad (1)$$

(1)式は，半径がr〜$r+dr$の範囲にある孔隙が，単位体積の土壌中に$f(r)\,dr$の体積で存在する事を意味している。孔隙半径の最小値をR_{min}とすれば，半径R以下の孔隙に水が詰まったときの体積含水率は次式で表される〔原著（A18）式；Rは積分区間を表し，孔隙径に関して積分を行う事を意味するrと使い分けられている〕。

$$\theta(R)=\int_{R_{\min}}^{R} f(r)dr+\theta_r \qquad (2)$$

ここで，θ_rは残留体積含水率であり，これ以下の水分は液状で移動しないため透水係数の評価において考慮しな

くてよい，との前提で以下の議論が行われている。ただし，実際にこのようなθ_rが定義できるかについては，現在でも多くの議論がある。これについては 4.4 節で詳しく述べる。残留体積含水率を導入すると，θ は θ_r〜θ_s の範囲で変化する。そこで θ をスケーリングして，0〜1 の値をとる有効飽和度 S_e を次式で与える〔原著(2)式〕。

$$S_e=\frac{\theta-\theta_r}{\theta_s-\theta_r} \tag{3}$$

なお，孔隙半径 r とマトリックポテンシャル水頭 Ψ の関係は，次の毛管上昇関数によって表される。

$$\Psi=A/r \tag{4}$$

ここで A は，水の表面張力と密度，水と土粒子の接触角，および重力加速度によって定まり，水温 20℃ でおよそ $-0.15\,\mathrm{cm}^2$ となる。

2.2　不飽和透水係数のモデル化

次に Mualem（1976）は，水分フラックスの向きと垂直で，距離が ΔX 離れた 2 つの土壌断面を想定し，その断面間で，円管状の孔隙が連結する確率を検討した。ΔX がゼロに近づくと，同じ孔隙が完全に連結するが，逆に ΔX が大きくなると，両断面間の孔隙の連結はまったくランダムに生じる。このとき，一方の断面に見られる半径 r〜$r+dr$ の孔隙が，もう一方の断面の半径 ρ〜$\rho+d\rho$ の孔隙に連結する確率は，$f(r)f(\rho)drd\rho$ となる。ΔX が孔隙サイズと同程度のときは，半径 r と ρ の孔隙の配置に相関があると考えられるため，Mualem は両者が連結する確率 $a(r,\rho)$ を次式で表した〔原著(9)式〕。

$$a(r,\rho)=G(R,r,\rho)f(r)f(\rho)drd\rho \tag{5}$$

ここで $G(R,r,\rho)$ は，半径 r と ρ の孔隙の配置にみられる相関を考慮するための補正係数である。

次に Mualem は，半径 r と ρ の円管状の孔隙が図-1 のように連結した場合の透水係数と，このような連結孔隙と等価な円管状孔隙の半径 R との関係を，次のように導いた。まず，Hagen-Poiseuille の法則に従う半径 R, r, ρ の円管状孔隙内の流量が，互いに等しくなる事から，次式が得られる〔原著（A4）式を改変〕。

$$-\frac{\pi R^4 g}{8v}\frac{\Delta\phi}{L}=-\frac{\pi r^4 g}{8v}\frac{\Delta\phi_1}{l_1}=-\frac{\pi\rho^4 g}{8v}\frac{\Delta\phi_2}{l_2} \tag{6}$$

ここで，v は水の動粘性係数，L, l_1, l_2 はそれぞれ半径 R, r, ρ の円管状孔隙の長さ $\Delta\phi$，$\Delta\phi_1$，$\Delta\phi_2$ はそれぞれ半径 R, r, ρ の円管状孔隙の両端にかかるポテンシャル差である。$\Delta\phi, \Delta\phi_1, \Delta\phi_2$ の間には次式の関係がある〔原著（A2）式〕。

$$\Delta\phi=\Delta\phi_1+\Delta\phi_2 \tag{7}$$

(6)式を(7)式に代入すると次のようになる。

$$\Delta\phi=\frac{R^4 l_1}{r^4 L}\Delta\phi+\frac{R^4 l_2}{\rho^4 L}\Delta\phi \tag{8}$$

よって，

$$\left(\frac{l_1}{r^4}+\frac{l_2}{\rho^4}\right)\frac{R^4}{L}=1 \tag{9}$$

半径 R の円管状孔隙の体積が，半径 r, ρ の円管状孔隙の体積の和に等しいと考えると〔原著（A5）式を改変〕，

$$\pi R^2 L=\pi r^2 l_1+\pi\rho^2 l_2 \tag{10}$$

(9)，(10)式から L を消去すると

$$R^6=\frac{r^2 l_1+\rho^2 l_2}{r^4 l_2+\rho^4 l_1}r^4\rho^4 \tag{11}$$

さらに図-1 に示したように，孔隙の長さが半径に比例すると仮定すると〔原著(10)式〕，

$$l_1/l_2=r/\rho \tag{12}$$

さらに(12)式を(11)式に代入すると〔原著（A7）式〕，

$$R^2=r\rho \tag{13}$$

が得られる。Hagen-Poiseuille の法則から，円管の透水係数はその半径の 2 乗に比例するため，図-1 のように連結した孔隙と等価な円管状孔隙の透水係数は $r\rho$ に比例する。

(5)式と(13)式より，半径 R 以下の孔隙が水で満たされたときの透水係数 K と，飽和透水係数 K_s との比（比透水係数 K_r）は，次のようになる〔原著(12)式〕。

$$K_r\equiv\frac{K}{K_s} \tag{14}$$
$$=\frac{\int_{R_{\min}}^{R}\int_{R_{\min}}^{R}T(R,r,\rho)\,G(R,r,\rho)\,r\rho f(r)f(\rho)\,drd\rho}{\int_{R_{\min}}^{R_{\max}}\int_{R_{\min}}^{R_{\max}}T(R,r,\rho)\,G(R,r,\rho)\,r\rho f(r)f(\rho)\,drd\rho}$$

ここで，$T(R,r,\rho)$ は孔隙の屈曲による影響を補正するための係数である。(14)式における係数 T と G を個別に評価する手段が無いため，Mualem は，Burdine（1953）や Millington and Quirk（1961）と同様に，両者の積が $(\theta-\theta_r)$ のべき関数（power function）になると仮定した。すると，〔原著(13)式〕

$$K_r=\left(\frac{\theta-\theta_r}{\theta_s-\theta_r}\right)^{\ell}\frac{\int_{R_{\min}}^{R}rf(r)\,dr\int_{R_{\min}}^{R}\rho f(\rho)\,d\rho}{\int_{R_{\min}}^{R_{\max}}rf(r)\,dr\int_{R_{\min}}^{R_{\max}}\rho f(\rho)\,d\rho}$$
$$=\mathrm{S_e}^{\ell}\left[\frac{\int_{R_{\min}}^{R}rf(r)\,dr}{\int_{R_{\min}}^{R_{\max}}rf(r)\,dr}\right]^2 \tag{15}$$

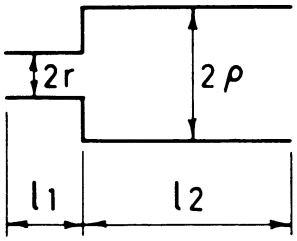


図-1 対になった毛管状孔隙の透水係数を評価するための，連結した円管の模式図（Mualem 1976, Figure 1）

Fig. 1 A combination of cylindrical tubes used to evaluate the hydraulic conductivity of a pair of capillary elements. (Mualem 1976, Figure 1)

が得られる。さらに

$$\int_{R_{\min}}^{R} rf(r)dr \propto \int_{\Psi_{\min}}^{\Psi(R)} \frac{1}{|\Psi|}\frac{d\theta}{d\Psi}d\Psi \propto \int_{\theta_r}^{\theta(R)} \frac{1}{|\Psi|}d\theta \propto \int_{0}^{S_e(R)} \frac{1}{|\Psi|}dS_e \tag{16}$$

の関係を用いて(15)式を変形すると，次式となる〔原著(21)式〕。

$$K_r = S_e{}^{\ell}\left[\frac{\int_0^{S_e}\frac{1}{|\Psi|}dS_e}{\int_0^{1}\frac{1}{|\Psi|}dS_e}\right]^2 \tag{17}$$

(17)式が，Mualemの提示した不飽和透水係数推定モデルである。

2.3 既往モデルとの比較

Mualemの微視的構造モデルの最大の特徴は，図-1のような連結孔隙と等価な円管状孔隙の透水係数を，(13)式のようにrとρの積で表現している点であろう。Mualem（1976）よりも以前に提示されたChilds and Collis-George（1950）のモデルでは，孔隙が連結した場合の透水係数は，小さな孔隙の半径によって決まるとしていた。つまり図-1の連結孔隙では，透水係数がr^2に比例すると考えることになる。この場合，(14)式右辺の分子は〔原著（A14）式を改変〕

$$\int_{\rho=R_{\min}}^{\rho=R}\int_{r=R_{\min}}^{r=\rho} T(R,r,\rho)G(R,r,\rho)r^2f(\rho)f(r)drd\rho + \int_{\rho=R_{\min}}^{\rho=R}\int_{r=\rho}^{r=R} T(R,r,\rho)G(R,r,\rho)\rho^2f(r)f(\rho)d\rho dr \tag{18}$$

という複雑な形となり，K_rの推定式は〔原著(24)式を改変〕

$$K_r = S_e{}^{\ell'}\frac{\int_{\theta_r}^{\theta}\frac{(\theta-\vartheta)}{|\Psi|^2}d\vartheta}{\int_{\theta_r}^{\theta_s}\frac{(\theta_s-\vartheta)}{|\Psi|^2}d\vartheta} \tag{19}$$

という扱いにくい関数となる。Mualem（1976）では，連結孔隙の透水係数を表現するのに$r\rho$とr^2のどちらが優れているかついて，物理的根拠に基づく議論は行われていない。ただ，一つ確実なのは，r^2ではなく$r\rho$で表現することによって，シンプルな関数形を持つ(17)式が得られた，ということである。以下は単なる筆者の憶測であるが，実際のところMualemは，数式的取扱の便宜性を強く意識してあらかじめ連結孔隙の透水係数を$r\rho$で表現することを決めていたのであって，(13)式を誘導するための(6)〜(12)式の理論は後から捻り出したのではないだろうか。例えば図-1を単純に眺めると

$$L = l_1 + l_2 \tag{20}$$

なる関係も容易に想像されるが，これを(10)式の代わりに使った場合は(13)式は導かれない。

話をMualem（1976）論文に戻すと，彼は45種類の土壌の水分特性曲線と飽和・不飽和透水係数のデータセットを既往文献から集め，それらに対して最も良い適合度を与える値として，(17)式中のべき数ℓを0.5と定めた。一方(19)式のℓ'については，Childs and Collis-George（1950）による0，Millington and Quirk（1961）による4/3，Kunze *et al.*（1968）による1の内から，先行研究で最もよい適合度が得られることが経験的に知られていた$\ell'=4/3$を採用した上で，(19)式の適合度を，$\ell=0.5$とした(17)式と比較した。さらに，径が異なる孔隙が連結する事は考えず，透水係数がHagen-Poiseuilleの法則で表される（すなわち半径の2乗に比例する透水係数を持つ）円管の束で，土壌の比透水係数をモデル化した次式（Burdine（1953）やWyllie and Gardner（1958）によって提示されたモデルに相当）

$$K_r = S_e{}^{2}\frac{\int_0^{S_e}\frac{1}{|\Psi|^2}dS_e}{\int_0^{1}\frac{1}{|\Psi|^2}dS_e} \tag{21}$$

や，Kozeny型の経験モデルであるAverjanov（1950）のモデル

$$K_r = S_e{}^{3.5} \tag{22}$$

についても検討を加えた。前述の45種類の土壌に関して以上の4つのモデルを比較したところ，$\ell=0.5$とした(17)式が，最も多くの土壌について最良の適合度を示し，かつ誤差の平均値を最も小さくすることがわかった

（Mualem, 1976）。

ただし，この議論はいささか公平さを欠いている。(17)式の $\ell=0.5$ は，この 45 種類の土壌に関する誤差の平均値を最小にするように定められたのであるから，同様に empirical なパラメータである (19) 式の ℓ'，(21) 式の S_e のべき数 2，(22) 式のべき数 3.5 についても，最適値を探索した上でモデル間の比較を行うべきであろう。このようなあら探しをすることは可能ではあるものの，45 種類もの土壌のデータを集め，異なるモデルを横並びで比較した研究は過去に例が無い。従って，研究手法に関しても Mualem（1976）は大いに評価できるものである。なおこの 45 種類の土壌に関するデータは，Mualem の土壌カタログ（Mualem, Y. : A catalogue of the hydraulic properties of unsaturated soils, Proj. 442, Technion-Israel Inst. of Technol., Haifa, Israel, 1976）として知られている。現在広く用いられている UNSODA データベース（Leij *et al.,* 1996）に比べれば品粗なものではあるが，当時は土壌不飽和水分特性に関する唯一のデータベースとして，多くの研究（例えば，西村ら，1985；Kosugi, 1994）で用いられた。なお当時は，インターネットが整備された今日とは異なり，このカタログを入手するのはなかなか困難であった。筆者は修士の学生の頃，岐阜大学（西村直正先生）を訪ね，カタログをコピーさせていただいた経験がある。

3. Mualem-van Genuchten モデル

3. 1　モデル導入の背景

Mualem（1976）は (17) 式中の積分を行う上で，実測値から求めた $S_e-\Psi$ 関係を直線補間し，それぞれの直線区間における積分値を積算する方法を採った。これでは，K_r の計算式が複雑になるうえ，計算時間がかかり，精度も悪くなる。もし，$S_e-\Psi$ の関係式を代入した (17) 式の積分が評価できると，K_r の解析解が得られて非常に便利である。このような関数は，閉形式（closed-form）の関数と呼ばれる。実は Mualem（1976）においても，次の Brooks and Corey（1964）式

$$S_e=(\Psi/\Psi_c)^{-\lambda} \quad \Psi<\Psi_c \qquad (23)$$

$$S_e=1 \quad \Psi\geq\Psi_c$$

を (17) 式に代入することによって，次の閉形式の比透水係数関数が導かれている〔原著 (16) 式〕。

$$K_r=S_e^{\ell+2+2/\lambda} \qquad (24)$$

(23) 式の Ψ_c は限界毛管水頭（空気侵入値），λ は孔隙径分布の幅を表す無次元パラメータ（pore size distribution index）である。

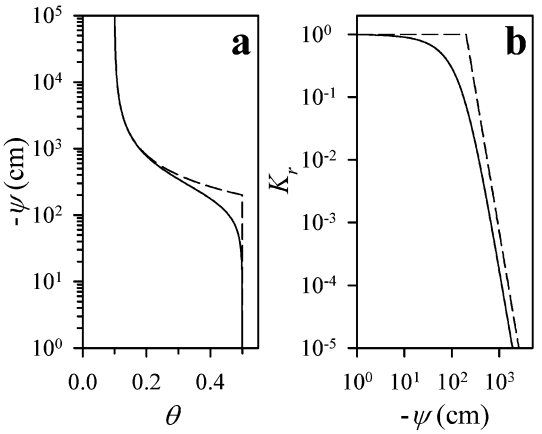


図-2　Mualem-van Genuchten モデル（実線）および Mualem-Brooks and Corey モデル（破線）による（a）水分特性曲線関数と（b）比透水係数関数
用いたパラメータは，$\alpha=0.005\,\mathrm{cm}^{-1}$，$n=2$，$m=0.5$，$\Psi_c=-200$ cm，$\lambda=1$，$\ell=0.5$（van Genuchten 1980, Figure 4 を改変）

Fig. 2　(a) Water retention and (b) relative hydraulic conductivity functions based on Mualem-van Genuchten (indicated by solid lines) and Mualem-Brooks and Corey (indicated by broken lines) models, with parameter values of $\alpha=0.005\,\mathrm{cm}^{-1}$, $n=2$, $m=0.5$, $\Psi_c=-200$ cm, $\lambda=1$, and $\ell=0.5$. (modified from van Genuchten 1980, Figure 4)

図-2a に破線で示した曲線は，$\Psi_c=-200$ cm，$\lambda=1$ とした場合に，(23) 式によって描かれる水分特性曲線である。この図から判るように，Brooks and Corey の水分特性曲線関数（(23) 式）では，Ψ が Ψ_c より小さくなると θ が急に飽和体積含水率 θ_s より減少を始め，J 字型の形状となる。この様な Ψ_c を境界とした急激な曲線形状の変化が，多くの実測データと食い違いを生じたことから，Mualem（1976）は (24) 式を用いた解析を行わなかった。なお，(24) 式によって描かれる比透水係数関数（図-2b；Mualem（1976）が経験的に定めた $\ell=0.5$ を用いている）でも，$\Psi<\Psi_c$ となると K_r が急に 1 より小さくなり始め，Ψ_c を境界とした急激な変化が認められる。

van Genuchten（1980）は，このような折れ曲がりを示す水分特性曲線や透水係数関数を Richards 式の数値解析に用いると，解の収束性が悪くなる場合があると考え，連続した傾きを持つ滑らかな関数を提示することの重要性を指摘した。ただし筆者は，傾きが不連続になる

こと自体は，数値解析においてそれほど大きな問題を引き起こすことはないと感じている。数値計算では，水分特性曲線や透水係数関数は離散的に取り扱われるからである。むしろ，$\Psi > \Psi_c$ において水分特性曲線の傾き（$d\theta/d\Psi$ の値）が0になることの方が，計算の不安定化をもたらすことが多い。さらに実際の所は，この様な数値計算上の問題よりも，実測データとの適合性の悪さが問題となることの方が多い。ガラスビーズや粗砂などの一様粒径の粒子を充填したサンプル以外では，水分特性曲線や透水係数関数の傾きが不連続になることは殆ど見られないからである。

3.2 van Genuchten の水分特性曲線関数

van Genuchten（1980）は，連続した傾きを持ち，かつ(17)式の積分を解析的に解くことができる水分特性曲線関数として，次式を提案した〔原著(3)式〕。

$$S_e = [1 + (-\alpha\Psi)^n]^{-m} \tag{25}$$

ここで，α は Ψ の逆数の次元を持つスケーリングパラメータ，m と n は無次元パラメータである。図-2a には，(25)式で $\alpha = 0.005\,\mathrm{cm}^{-1}$，$n = 2$，$m = 0.5$ とした場合に描かれる水分特性曲線を示した。連続した傾きを持つS字型の曲線となっていることがわかる。

van Genuchten（1980）は，(25)式で $m = 1$ とした場合が，過去に Ahuja and Swartzendruber（1972），Endelman *et al.*（1974），Haverkamp *et al.*（1977）などによって使用され，水分特性曲線を良好に表現できていたことを指摘している。従って van Genuchten の水分特性曲線関数のルーツは，これらの論文にあると考えられる。ただし著者の知る限りでは，$m = 1$ とした(25)式が最初に使用されたのは Brutsaert（1966）である。

3.3 透水係数関数

(25)式が単に連続した傾きを持つ滑らかな関数であるだけだったら，今日のように頻繁に使用されるモデルにはなっていなかったであろう。なぜなら，そのような特性を持つ水分特性曲線関数（例えば，$m = 1$ とした(25)式）は，先に述べたとおり，既に Brutsaert（1966）等によって提案されていたからである。van Genuchten（1980）の最大の功績は，m と n に一定の関係を持たせることによって，(25)式を(17)式の積分を解析的に解くことができる関数にし，閉形式の透水係数関数を導いたことである。以下に，その導出過程を述べる。

(17)式は，次のように書くことができる〔原著(4)式〕。

$$K_r = S_e^{\ell}\left[\frac{f_n(S_e)}{f_n(1)}\right]^2 \tag{26}$$

ここで，

$$f_n(S_e) = \int_0^{S_e} \frac{1}{(-\alpha\Psi)}\,dx \tag{27}$$

である。(27)式の x は積分のためのダミー変数である。(25)式で S_e を x とおいたものを（$-\alpha\Psi$）について解き，(27)式に代入すると，〔原著(5)式〕

$$f_n(S_e) = \int_0^{S_e}\left[\frac{x^{1/m}}{1-x^{1/m}}\right]^{1/n} dx \tag{28}$$

となる。さらに $x = y^m$ とすると(28)式は，〔原著(6)式〕

$$f_n(S_e) = m\int_0^{S_e^{1/m}} y^{m-1+1/n}(1-y)^{-1/n}\,dy \tag{29}$$

となる。ここで $m - 1 + 1/n = 0$（すなわち $m = 1 - 1/n$）なる関係を導入すれば，(29)式は解析的に解けて，〔原著(7)式〕

$$f_n(S_e) = 1 - (1 - S_e^{1/m})^m \tag{30}$$

となる。(30)式を(26)式に代入することで，次の比透水係数関数が得られる〔原著(8)式〕。

$$K_r = S_e^{\ell}[1 - (1 - S_e^{1/m})^m]^2 \tag{31}$$

$m = 1 - 1/n$ とした(25)式と，(31)式が，Mualem-van Genuchten モデルである。(31)式に(25)式を代入すれば，K_r を Ψ の関数として表すことができる。その一例を図-2b に示した。Mualem-Brooks and Corey モデルとは異なり，連続した傾きを持つ曲線となっていることがわかる。なお van Genuchten（1980）では，ℓ の値は Mualem（1976）が経験的に定めた0.5とされているため，(31)式〔原著(8)式〕中にパラメータ ℓ は登場しない。図-2b の $K_r - \Psi$ 曲線も $\ell = 0.5$ として描かれたものである。

図-3 には Mualem-van Genuchten モデルの適用例を示した。左側の図は，水分特性曲線の実測値に，$m = 1 - 1/n$ とした(25)式を当てはめた結果である。これにより定められた α, n, m の値を用いることで，$\ell = 0.5$ とした(31)式から $K_r - \Psi$ 曲線を推定することができる。このようにして推定された K_r の値は，図-3 の右側に示した通り，実測値を良好に再現した。van Genuchten（1980）は，図-3 に示した以外にも，3種類の土壌について Mualem-van Genuchten モデルの適用結果を示している。その内の1つについては，(31)式による K_r の推定結果はあまり良好なものではなかった。しかしながら，残りの4種類の土壌に対する適合の良さは，読者に鮮烈な印象を与えるものであった。このため，Mualem（1976）が45種類の土壌の平均的な値として求めた $\ell = 0.5$ という経験値が，その後の研究で種々の土壌に対して広く用いられるようになった。ただし，Wösten and van Genuchten（1988），Schuh and Cline（1990），Kosugi（1999）などが指摘するように，実際の ℓ は土壌毎に大き

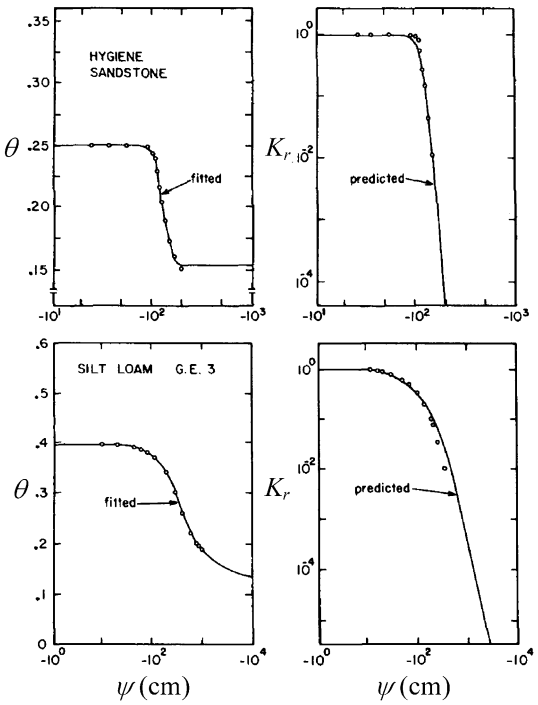


図-3　水分特性曲線と比透水係数の実測値（○印）と計算値（実線）
Hygiene Sandstone（上段）と Silt Loam G.E. 3（下段）の結果（van Genuchten 1980, Figure 5 と 7 を改変）

Fig. 3　Observed (open circles) and calculated (solid lines) curves for soil water retention and relative hydraulic conductivity, for Hygiene Sandstone (upper panels) and Silt Loam G.E. 3 (lower panels). (modified from van Genuchten 1980, Figures 5 and 7)

く異なっており，ℓ をフィッティングパラメータとすることによって(31)式の適合度は大幅に向上する。つまり ℓ の値は，基本的にはそれぞれの土壌で定めるべきものである。しかしこの場合は，水分特性曲線から直ちに K_r を推定できる利便性は失われる。

なお van Genuchten（1980）は，$m=1-2/n$ とした(25)式を(21)式に代入することによって，(31)式とは別の閉形式の透水係数関数を導いている（Burdine-van Genuchten モデル）。ただしこのモデルは，Mualem-van Genuchten モデルよりも適合面で劣るため，その後の研究ではあまり用いられていない。

3.4　Brooks and Corey との対応

van Genuchten（1980）は，(25)式と Brooks and Corey 式（(23)式）との対応について次のような考察を加えている。Ψ の絶対値が大きい（すなわちサクションが大きい）領域では，(25)式はカギ括弧内の第二項が相対的に大きくなるため，次式で近似される〔原著(33)式〕。

$$S_e=(-\alpha\Psi)^{-mn} \tag{32}$$

(23)式と(32)式の比較から，

$$\alpha=-1/\Psi_c \tag{33}$$

$$mn=\lambda \tag{34}$$

なる対応関係がある。そして(33)式より，スケーリングパラメータ α の意味について，「その逆数が限界毛管水頭と関連している」と述べている。

図-2a の両モデルの水分特性曲線は，(33)，(34)式の対応に従って描かれている（ただし(25)式については $m=1-1/n$ の関係を用いている）。このため，サクションが大きい範囲で 2 つの曲線は一致している。サクションが小さい範囲では両者は大きく異なっており，(25)式で描かれる曲線では，α の逆数として得られる $\Psi=-200$ cm は限界毛管水頭に一致しない。van Genuchten の水分特性曲線関数は，S 字型の曲線を描き明瞭な限界毛管水頭を持たないので，これは当然である。van Genuchten（1980）が α の意味に関して，「逆数が限界毛管水頭と関連している」という歯切れの悪い表現をしたのはこのためである。

その後 van Genuchten and Nielsen（1985）は，(25)式において $m=1-1/n$ の関係を課す代わりに，m と n の積（$=\lambda$）を一定に保ったまま n を大きくしていくことによって，サクションが小さい範囲でも(25)式が Brooks and Corey 式（(23)式）に一致し，(33)式が完全に成立する（α の逆数が厳密に限界毛管水頭に等しくなる）ことを指摘した（図-4）。その理由は，(25)式に $\Psi=1/(-\alpha)$ を代入すると $S_e=2^{-m}$ となることから明らかである。すなわち，m と n の積を一定に保ったまま n を大きくしていけば，m は次第にゼロに近づき，$\Psi=1/(-\alpha)$ における有効飽和度が 1 に近づくからである。

4.　補足的な議論

4.1　van Genuchten の水分特性曲線関数のパラメータの意味

Mualem-van Genuchten モデルでは，$m=1-1/n$ の関係を用いていることから，(25)式において m を消去すると

$$S_e=[1+(-\alpha\Psi)^n]^{(1/n)-1} \tag{35}$$

となる。近年，(35)式があまりにも頻繁に用いられるよう

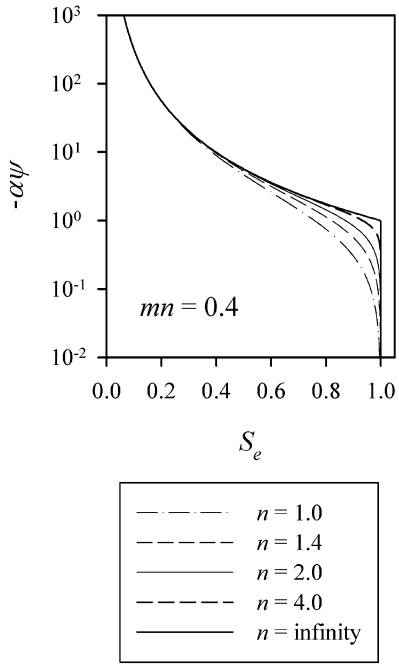


図-4 m と n の積を 0.4 に固定して n を増加させた場合の，(25) 式で描かれる水分特性曲線関数（van Genuchten and Nielsen 1985, Figure 2 を改変）

Fig. 4 Water retention functions based on Eq. (25), when n was increased and m was simultaneously decreased such that the product mn remains 0.4. (modified from van Genuchten and Nielsen 1985, Figure 2)

になるにつれて，本来，フィッティングパラメータ（実測値に対して適合して決めるべきパラメータ）である α と n が，あたかも土壌の特性を表す一種の物理量として，物理的意味が明確な K_s や θ_s と同等に扱われる傾向が見られ，これは「浸透計算に便利な経験関数を提示する」という van Genuchten (1980) 本来の意図とは必ずしも一致していない印象が持たれる。K_s や θ_s は，Mualem-van Genuchten モデルと切り離されても単独で意味を持つものであるが，α や n の値は，(35) 式に代入して水分特性曲線の形状を特徴付けてこそ意味があるものであり，それぞれ単独で意味を持つものではない。なお，θ_r については後述する。

さらに水分特性曲線の形状を検討する上でも，α と n が適切なパラメータであるのか，筆者は疑問を感じている。n は無次元化した水分特性曲線（つまり，$S_e-\alpha\Psi$ 曲線）の形状を特徴付けており，n が大きいほど変曲点付近の S_e の変化が大きくなる。従って，孔隙径分布の幅が狭い砂などの場合は n が大きく，幅広型の孔隙径分布を示す粘土などの場合は n が小さくなる。ただし，n は 1 より大きな値をとるが上限がないため，例えば「この土壌の n は 2.68」と言われたときに，それが大きいのか小さいのかの判断は，あらかじめ，どの様な土がどの様な n 値をとるのかについて十分な知識を持っていないと不可能である。一方，$m=1-1/n$ であるので，$1<n<\infty$ を代入すると，$0<m<1$ となる。つまり m は，その取り得る範囲が 0〜1 になるように既に規格化されているため，曲線を特徴付ける指標として n より適していると考えられる。$m=1-1/n$ の関係を用いて (25) 式から n を消去すれば

$$S_e=[1+(-\alpha\Psi)^{1/(1-m)}]^{-m} \tag{36}$$

となる。図-5a には，α を 0.01 cm^{-1} に固定（$1/\alpha=-100$ cm）し，m を 0.1 刻みで 0 から 1 まで変化させたときの (36) 式の挙動を示した。$m\to0$ なら Ψ の値にかかわらず $S_e=1$ となり，飽和のまま含水率が全く減少しない。これほど極端ではないが，heavy clay はこのタイプの水分特性曲線を描き，サクションの増加に伴って S_e が僅かずつ減少する。一方 $m\to1$ なら，$1/(1-m)$（$=n$）が無限大となることから，$|\Psi|<|1/\alpha|$ では $S_e=1$，$|\Psi|>|1/\alpha|$ では $S_e=0$ となる（図-5a）。これほど極端ではないが，粒径が一様な glass beads はこのようなタイプの水分特性曲線を描き，限界毛管水頭を境界として S_e が一気に減少する。そして図-5a では，m が 0.1 ずつ変化すると，曲線はほぼ均等な間隔を保って段階的に変化している。このように，孔隙径分布が最も分散型の土壌では $m=0$，最も集中型の土壌では $m=1$ になる，ということを知っていれば，van Genuchten の水分特性曲線に不慣れな人でも，m の値からおおよその曲線形状を思い描くことが可能である。

α については，しばしば用いられる「α の逆数が限界毛管水頭に対応する」との解釈が必ずしも適切でないことは，既に図-2a で見たとおりである。そもそも van Genuchten の水分特性曲線関数は「傾きが連続した S 字型の曲線」を表現するために開発されたのだから，限界毛管水頭を持ち出すこと自体が矛盾である。S 字型の水分特性曲線を特徴付けるのに適切なマトリックポテンシャル水頭としては，変曲点に対応する値（以下 Ψ_0 とする）が考えられるであろう。Ψ_0 は，単に曲線の形状を特徴付けるだけではなく，水分特性曲線の傾き（$d\theta/d\Psi$ の値）として求められる比水分容量 C が最大となるときの Ψ 値を表しており，不飽和浸透計算においても重要な意味を持っている。Ψ_0 の値は，(36) 式を Ψ について 2 回微

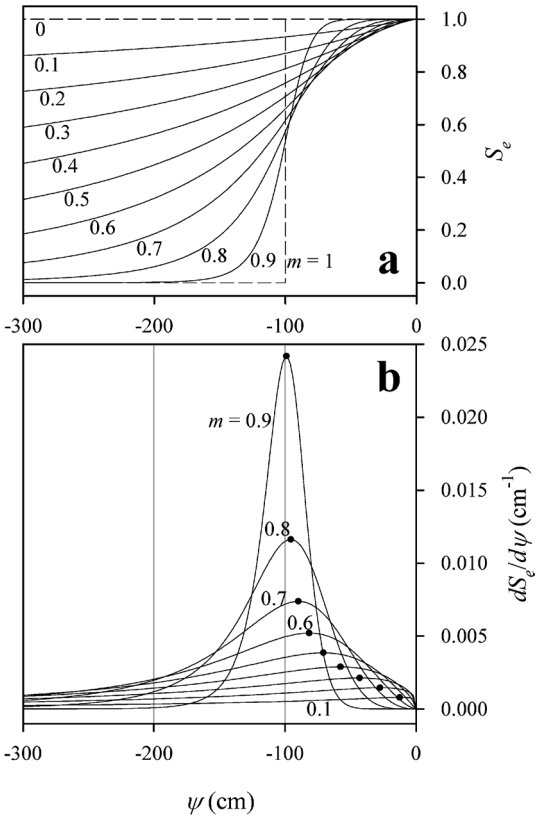


図-5　α を 0.01 cm^{-1} に固定して m を変化させた場合の，(a) ㊱ 式で描かれる $S_e-\Psi$ 関数と，(b) それを微分した $dS_e/d\Psi-\Psi$ 関数 $dS_e/d\Psi-\Psi$ 関数上の●印は，$dS_e/d\Psi$ の極大値を表す

Fig. 5　(a) Water retention functions based on Eq. (36) and (b) their derivatives, when α was fixed at 0.01 cm^{-1} and m was changed. Solid circle on each $dS_e/d\Psi-\Psi$ curve represents maximal $dS_e/d\Psi$ value.

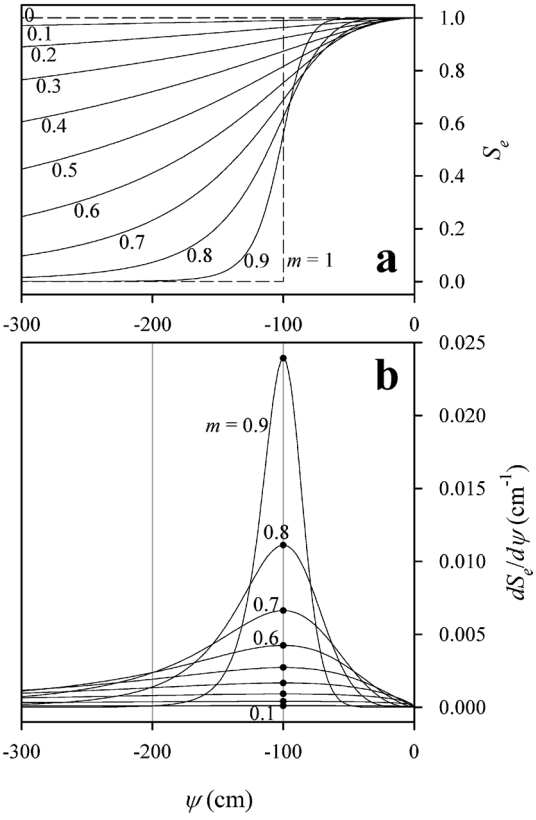


図-6　Ψ_0 を−100 cm に固定して m を変化させた場合の，(a) ㊳ 式で描かれる $S_e-\Psi$ 関数と，(b) それを微分した $dS_e/d\Psi-\Psi$ 関数 $dS_e/d\Psi-\Psi$ 関数上の●印は，$dS_e/d\Psi$ の極大値を表す

Fig. 6　(a) Water retention functions based on Eq. (38) and (b) their derivatives, when Ψ_0 was fixed at −100 cm and m was changed. Solid circle on each $dS_e/d\Psi-\Psi$ curve represents maximal $dS_e/d\Psi$ value.

分することで得られる。

$$\Psi_0=-m^{1-m}/\alpha \qquad (37)$$

実は van Genuchten 自身も，プリンストン大学の研究レポート（van Genuchten, 1978）の中で ㊲ 式を示している。㊲ 式を α について解いて ㊱ 式に代入すれば，次式が得られる（Kosugi, 1994）。

$$S_e=[1+m(\Psi/\Psi_0)^{1/(1-m)}]^{-m} \qquad (38)$$

図-6a には，Ψ_0 を−100 cm に固定し，m を変化させたときの ㊳ 式の挙動を示した（α の値は ㊲ 式の関係に従って変化している）。いずれの場合でも水分特性曲線の変曲点は $\Psi=-100$ cm の位置にある。Ψ_0 の意味をより明確にするため，図-6b には，図-6a の各曲線を微分して得られる $dS_e/d\Psi-\Psi$ 曲線を示した。$dS_e/d\Psi$ に有効孔隙率（$\theta_s-\theta_r$）を掛ければ比水分容量 C となる。$dS_e/d\Psi$ の値は，m の値にかかわらず，$\Psi=-100$ cm で最大となっていることがわかる。これに対して図-5 では，α の逆数として得られる $\Psi=-100$ cm の値が，水分特性曲線上でも $dS_e/d\Psi-\Psi$ 曲線上でも明確な意味を持っていな

い。

以上のことから，n と α の代わりに m と Ψ_0 を用いた(38)式が，van Genuchten の水分特性曲線関数のより適切な表現方法だと筆者は考えている。なお(38)式は，表現方法が異なるだけで，本質的には(35)式と等価であるから，(38)式を Mualem モデル（(17)式）に代入して得られる比透水係数関数は(31)式と一致する。

4. 2 対数正規分布モデル

van Genuchten（1980）の水分特性曲線関数は，実測値に対する高い適合性と，閉形式の比透水係数関数が導かれるという利便性を理由として導入された。その一方で，このような経験的なフィッティング関数ではなく，物理的・統計的な意味合いが明確な関数を用いて水分特性曲線を表現する研究も行われてきた。特に，多くの土壌において土粒子径が対数正規分布を示すことからの類推で，孔隙径分布を対数正規分布で表現することが古くから試みられてきた（Gardner, 1956 ; Brutsaert, 1966）。対数正規分布型の孔隙径分布関数 $f(r)$ は，孔隙半径の自然対数値 $\ln(r)$ が，平均 $\ln(r_m)$，標準偏差 σ の正規分布に従うとして，次式で表される（Kosugi, 1994, 1996）。

$$f(r)=\frac{\theta_s-\theta_r}{\sigma r\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{[\ln(r/r_m)]^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{39}$$

r_m はメジアン孔隙径に対応し（r_m 以下の半径を持つ孔隙が全て水で満たされたときの有効飽和度 S_e が 0.5 となる），σ（>0）は孔隙径分布の幅を表す無次元パラメータである。(39)式を(2)式に代入することによって，次の水分特性曲線関数が得られる。

$$S_e=Q[\ln(\Psi/\Psi_m)/\sigma] \tag{40}$$

ここで，Ψ_m はメジアン孔隙径 r_m を(4)式に代入して得られる Ψ 値（つまり $\Psi_m=A/r_m$）であり，$S_e=0.5$ のときのマトリックポテンシャル水頭を表している。また $Q(x)$ は，次式で定義される余正規分布関数であり，正規分布の x から上側の確率を表している。

$$Q(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_x^\infty \exp(-u^2/2)du \tag{41}$$

(40)式からわかるように，対数正規分布を仮定した場合，水分特性曲線関数が閉形式ではなくなってしまう。しかしながら，$Q(x)$ は統計学上最も基本的な関数の一つであり，例えば Microsoft® Excel のワークシート関数 *NORMSDIST* を用いれば

$$Q(x)=NORMSDIST(-x) \tag{42}$$

と計算される。また $Q(x)$ は，余誤差関数 $\mathrm{erfc}(x)=2\int_x^\infty \exp(-u^2)du/\sqrt{\pi}$ と次の関係にある。

$$Q(x)=\mathrm{erfc}(x/\sqrt{2})/2 \tag{43}$$

(40)式を Mualem モデル（(17)式）に代入することで得られる比透水係数関数は

$$K_r=S_e^{\ell}\{Q[Q^{-1}(S_e)+\sigma]\}^2 \tag{44}$$

となる（Kosugi, 1996）。ここで，Q^{-1} は Q の逆関数であり，$S_e=Q(x)$ に対して $x=Q^{-1}(S_e)$ となる。すなわち $Q^{-1}(S_e)$ は，正規分布の上側確率が S_e となるときの x の値を返す関数である。Microsoft® Excel のワークシート関数 *NORMSINV* を用いれば

$$Q^{-1}(S_e)=-NORMSINV(S_e) \tag{45}$$

と計算される。(40)式と(44)式の組み合わせ（対数正規分布モデル）は，Mualem-van Genuchten モデルと非常によく似た挙動を示すことが知られていて，例えば図-3 に示した水分特性曲線と不飽和透水係数のデータセットに対する適合具合は，両モデル間で殆ど差がない（Kosugi, 1996）。

対数正規分布モデルは，そのパラメータが統計量と直接対応していることから，孔隙径分布の理論的解析に適したモデルといえる。例えば，砂質土壌はローム質土壌と比べて，メジアン孔隙径（$r_m=A/\Psi_m$）が大きく孔隙径分布が集中型である（σ が小さい）ことや，森林土壌では，団粒構造が発達するにつれメジアン孔隙径が大きくなることが示されている（Kosugi, 1997）。

4. 3 包括的な不飽和透水係数推定モデル

Childs and Collis-George（1950）モデル（(19)式）は異質であるが，Mualem（1976）モデル（(17)式）や Burdine（1953）モデル（(21)式）は同様の式形をしている。よって，これらのモデルを包括する一般性の高いモデルを

$$K_r=S_e^{\ell}\left[\frac{\displaystyle\int_0^{S_e}\frac{1}{|\Psi|^\beta}dS_e}{\displaystyle\int_0^1\frac{1}{|\Psi|^\beta}dS_e}\right]^\eta \tag{46}$$

と表すことができる（Raats, 1992 ; Kosugi, 1999）。Mualem モデルでは $\ell=0.5$，$\beta=1$，$\eta=2$ となり，Burdine モデルでは $\ell=2$，$\beta=2$，$\eta=1$ である。

(46)式に(25)式を代入して得られる不飽和透水係数関数は，次のようになる（Raats, 1992）。

$$K_r=S_e^{\ell}[I_{S_e^{1/m}}(m+\beta/n, 1-\beta/n)]^\eta \tag{47}$$

ただし，$I_x(p, q)$ は次式で定義される不完全ベータ関数である。

$$I_x(p,q)=\int_0^x u^{p-1}(1-u)^{q-1}du \Big/ \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du \tag{48}$$

(47)式において $m=1-1/n$ とし，$\beta=1$，$\eta=2$ を代入すれば，(31)式に帰着する。

一方，対数正規分布モデルの場合は，(40)式を(46)式に代入して

$$K_r=S_e^{\ell}\{Q[Q^{-1}(S_e)+\beta\sigma]\}^{\eta} \tag{49}$$

なる包括的モデルが得られる。Kosugi（1999）は，200種類の土壌の不飽和透水係数を(49)式を用いて解析し，モデルの柔軟性を保つためには，ℓ のみでなく β もフィッティングパラメータとする必要があることを示した。一方，η は定数に固定できるとし，関数形が最もシンプルになる

$$K_r=S_e^{\ell}Q[Q^{-1}(S_e)+\beta\sigma] \tag{50}$$

を不飽和透水係数の一般式とした。

4. 4　残留体積含水率

実測された土壌の水分特性曲線の大半では，マトリックポテンシャル水頭 Ψ の低下に伴って，体積含水率 θ があたかもその土壌固有の最小値に漸近する様子で減少していく。このため残留体積含水率 θ_r は，水分特性曲線関数の適合性を向上させるのに不可欠なパラメータであるが，その定義や取扱については議論が絶えない。Luckner *et al.*（1989）は，θ_r を「土粒子を覆っている水の膜が非常に薄くなり，水が土粒子に強い力で拘束されるため，水理水頭勾配に反応した液状水移動が停止してしまうときの含水率」と定義している。これに対してNimmo（1991）は，水分特性曲線関数のフィッティングを行う際に，用いるデータの範囲を変えると θ_r の値が容易に変化してしまうことを示した上で，Luckner *et al.* の定義は計測に裏付けられたものではなく θ_r はフィッティングパラメータの性格が強い，と反論している。Šír *et al.*（1985）は，新たな体積含水率 θ_b（$\theta_b \leq \theta_r$）を物理的意味の無いフィッティングパラメータとして導入することにより，θ_r に物理的意味を与え，計測可能なパラメータとすることを提案している。

実際には，$\Psi \to -\infty$ において $\theta=\theta_r$ となることはなく，Ψ が非常に小さくなれば θ はゼロに近づいていく。にもかかわらず θ_r が用いられるのは，液状水の移動を解析する際には極端に乾燥した領域の水分特性曲線は必要でないことや，水分特性曲線の計測データの多くが湿潤領域に限られていること，さらに最初に述べたとおり，湿潤領域の水分特性曲線がゼロ以上の含水率に漸近する様子を表現するには「漸近値」を表すパラメータが必要であることが原因となっている。

ただし，(17)式を用いた不飽和透水係数関数の推定結果は，θ_r の定め方に依存して大きく変化してしまうことに注意が必要である。実はこの事実は，Mualem（1976）自身も指摘している。上述の Nimmo（1991）の結果に基づけば，推定結果は，水分特性曲線データの範囲にも大きく依存することになる。もちろんこの傾向は Mualem モデルに限ったものではなく，(19)，(21)，(22)，(44)式などの有効飽和度 S_e を用いた推定モデルに共通して見られるものである。

近年の研究では，例えば，乾燥時の水蒸気移動も考慮して，全マトリックポテンシャル領域にわたる土壌水分移動を解析することも行われ始めている。この様な場合には，Ψ の低下によって最終的には $\theta=0$ となる水分特性曲線関数が必要になる。Rossi and Nimmo（1994），Fayer and Simmons（1995），仲江川（1995）は，飽和から絶乾までの全含水率領域にわたって適用可能な水分特性曲線関数を提示している。また，単純な凸型の孔隙径分布を持つ土壌に対して開発された水分特性曲線関数を足し合わせることで，複数の変曲点を持つ複雑な曲線形状を表現する multimodal model が提案されている（例えば，Othmer *et al.*, 1991 ; Durner, 1994 ; Ross and Smettem, 1993）が，これを用いることもできる。すなわち，湿潤領域の水分特性曲線を特徴付けるサイズの大きな孔隙の分布関数と，乾燥領域の水分特性曲線を特徴付けるサイズの小さな孔隙の分布関数を足し合わせることによって，$\Psi \to -\infty$ において $\theta=0$ となる水分特性曲線を表現するのである。これらの関数を(17)式に代入すれば，Mualem（1976）に基づく不飽和透水係数関数が得られることになる（Kosugi *et al.*, 2002 ; 小杉，2004）。

5.　おわりに

(17)式で表される Mualem（1976）の微視的構造モデルが，それ以前に提示された Childs and Collis-George（1950）のモデル（(19)式）や Burdine（1953）のモデル（(21)式）に比べて理論的に優っているのかどうかについては，Mualem（1976）においても，その後の研究においても，物理的根拠に基づく議論はなく定かでない。ただし Mualem モデルが，Childs and Collis-George モデルよりも平易な式形をしており，Burdine モデルよりも経験的に適合度が高いことは確かである。このようなシンプルでパフォーマンスの高いモデルが提示されていなければ，これに続く van Genuchten の仕事は存在しなかったであろう。

その一方で，van Genuchten の仕事がなかったなら，Mualem のモデルは現在のようには注目されていな

かったのも確かである。なぜならMualem（1976）のように，実測値を直線補間した$S_e-\Psi$関係から透水係数を計算するのは，非常に煩わしいからである。かといって，Mualem-Brooks and Coreyモデルでは，実測データとの十分な一致が得られないうえ，Richards式の数値解析が不安定になる場合があるからである。

このようなことからMualem-van Genuchtenモデルは，Mualemの深い考察力，van Genuchtenの重要な研究課題を見極める能力，そして両者の卓越した数学的能力が，非常に上手く組み合わさって生まれたものだと痛感する。はじめに，Mualem（1976）やvan Genuchten（1980）が非常に多くの論文で引用されていることを述べたが，その引用先は，土壌学分野，水文・水資源学分野に留まらず，農学・作物学分野，土木工学分野，地球科学分野，気象学分野，環境科学分野，さらには生物・生態学分野，食品科学分野，コンピュータサイエンスと多岐にわたっており，まさにMualem-van Genuchtenモデルは土壌物理学分野の「宝物」だと感じる。それと同時に，このモデルがここまで広く利用されているという事実は，土壌物理学が，多くの学問分野において基礎となる現象を対象とした，重要な学問分野であることを明確に示しているといえよう。

本稿の執筆にあたり，三重大学の取出伸夫博士から多くの貴重なコメントをいただきました。ここに記し，謝意を表します。なお，補足的な解析には科学研究費補助金（19380087）の補助を受けた。

引 用 文 献

Ahuja, L.R. and Swartzendruber, D. (1972) : An improved form of soil-water diffusivity function. Soil Sci. Soc. Am. Proc. **36** : 9–14.

Averjanov, S.F. (1950) : About permeability of subsurface soils in case of incomplete saturation. Eng. Collect., 7.

Brooks, R.H. and Corey, A.T. (1964) : Hydraulic properties of porous media. Hydrol. Pap. no. 3. Colorado State Univ., Ft. Collins, USA.

Brutsaert, W. (1966) : Probability laws for pore-size distributions. Soil Sci. **101** : 85–92.

Burdine, N.T. (1953) : Relative permeability calculations from pore-size distribution data. Trans. Am. Inst. Min. Metall. Pet. Eng., **198** : 71–77.

Childs, E.C. and Collis-George, N. (1950) : The permeability of porous materials. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **201** : 392–405.

Durner, W. (1994) : Hydraulic conductivity estimation for soils with heterogeneous pore structure. Water Resour. Res., **30** : 211–223.

Endelman, F.J., Box, G.E.P., Boyle, J.R., Hughes, R.R., Keeney, D.R., Northrup, M.L. and Saffigna, P.G. (1974) : The mathematical modeling of soil-water-nitrogen phenomena. EDFB-IBP-74-8. Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tenn., USA.

Fayer, M.J. and Simmons, C.S. (1995) : Modified soil water retention functions for all matric suctions. Water Resour. Res., **31** : 1233–1238.

Gardner, W.R. (1956) : Representation of soil aggregate-size distribution by a logarithmic-normal distribution. Soil Sci. Soc. Am. Proc., **20** : 151–153.

Haverkamp, R., Vauclin, M., Touma, J., Wierenga, P. J. and Vachaud, G. (1977) : A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration. Soil Sci. Soc. Am. J. **41** : 285–294.

Hendrayanto, Kosugi, K., Uchida, T., Matsuda, S. and Mizuyama, T. (1999) : Spatial variability of soil hydraulic properties in a forested hillslope. J. For. Res., **4** : 107–114.

Kosugi, K. (1994) : Three-parameter lognormal distribution model for soil water retention. Water Resour. Res., **30** : 891–901.

Kosugi, K. (1996) : Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties. Water Resour. Res., **32** : 2697–2703.

Kosugi, K. (1997) : A new model to analyze water retention characteristics of forest soils based on soil pore radius distribution. J. For. Res., **2** : 1–8.

Kosugi, K. (1999) : General model for unsaturated hydraulic conductivity for soils with lognormal pore-size distribution. Soil Sci. Soc. Am. J., **63** : 270–277.

小杉賢一朗（2004）不飽和浸透特性のモデル化．地盤工学会編「不飽和地盤の挙動と評価」．pp. 35–45．丸善，東京．

Kosugi, K., Hopmans, J.W. and Dane J.H. (2002) : Parametric models. In : Methods of Soil Analysis, Part 4, Physical Methods. (eds J.H. Dane and G.C. Topp), pp. 739–757. Soil Sci. Soc. Am., Madison, WI, USA.

Koutsoyiannis, D. and Kundzewicz, Z.W. (2007) : Quantifying the impact of hydrological studies. Hydrological Sciences-Journal-des Sciences Hy-

drologiques, **52** (1) : 3–17.

Kunze, R.J., Uehara, G. and Graham, K. (1968) : Factors important in the calculation of hydraulic conductivity. Soil Sci. Soc. Am. Proc., **32** : 760–765.

Leij, F.J., Alves, W.J., van Genuchten, M. Th. and Williams, J.R. (1996) : The UNSODA unsaturated soil hydraulic database. Res. Rep. 600 R-96 095. 103 pp. US Environmental Protection Agency, Cincinnati, Ohio, USA.

Luckner, L., van Genuchten, M.Th. and Nielsen, D.R. (1989) : A consistent set of parametric models for the two-phase flow of immiscible fluids in the subsurface. Water Resour. Res., **25** : 2187–2193.

Millington, R.J. and Quirk, J.P. (1961) : Permeability of porous solids, Trans. Faraday Soc., **57** : 1200–1206.

Mualem, Y. (1976) : A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. Water Resour. Res., **12** : 513–522.

仲江川敏之・弘中貞之・沖　大幹・虫明功臣（1995）：高サクション領域における水分特性曲線の物理的外挿．水文・水資源学会誌，**8** : 453–461.

Nimmo, J.R. (1991) : Comment on the treatment of residual water content in “A consistent set of parametric models for the two-phase flow of immiscible fluids in the subsurface” by L. Luckner et al. Water Resour. Res., **27** : 661–662.

西村直正・三野　徹・丸山利輔（1985）：不飽和透水係数予測モデルのパラメータの推定―水分特性曲線と不飽和透水係数との関係（Ⅱ）．農業土木学会論文集，**120** : 69–74.

Othmer, H., Diekkrüger, B. and Kutílek, M. (1991) : Bimodal porosity and unsaturated hydraulic conductivity. Soil Sci., **152** : 139–150.

Penman, H.L. (1948) : Natural evaporation from open water, bare soil and grass. Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, Math. and Phys. Sci., **193** (1032) : 120–145.

Raats, P.A.C. (1992) : A superclass of soils. In : Proc. Int. Worksh. Indirect methods for estimating the hydraulic properties of unsaturated soils, Riverside, CA, 11–13 Oct. 1989. (eds M.Th. van Genuchten et al.), pp. 45–51. Univ. Calif., Riverside, CA, USA.

Rossi, C. and Nimmo, J.R. (1994) : Modeling of soil water retention from saturation to oven dryness. Water Resour. Res., **30** : 701–708.

Ross, P.J. and Smettem, K.R.J. (1993) : Describing soil hydraulic properties with sums of simple functions. Soil Sci. Soc. Am. J., **57** : 26–29.

Schuh, W.M. and Cline, R.L. (1990) : Effect of soil properties on unsaturated hydraulic conductivity pore-interaction factors. Soil Sci. Soc. Am. J., **54** : 1509–1519.

Šír, M., Vogel, T. and Císlerová, M. (1985) : The analytical expression of the retention curves and hydraulic conductivities (in Czech). Vodohosp. Čas., **33** : 74–85.

van Genuchten, R. (1978) : Calculating the unsaturated hydraulic conductivity with a new closed-form analytical model. Res. Rep. 78-WR-08. Princeton Univ., Princeton, USA.

van Genuchten, M.Th. (1980) : A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. J., **44** : 892–898.

van Genuchten, M.Th., Leij, F.J. and Wu, L. (1999) : Characterization and measurement of the hydraulic properties of unsaturated porous media, Proc. Int. Worksh., Riverside, CA, 22–24 Oct. 1997. U.S. Salinity Lab. and Univ. Calif., Riverside, CA, USA.

van Genuchten, M.Th. and Nielsen, D.R. (1985) : On describing and predicting the hydraulic properties of unsaturated soils. Ann. Geophys. **3** : 615–628.

Wösten, J.H.M. and van Genuchten, M.Th. (1988) : Using texture and other soil properties to predict the unsaturated soil hydraulic functions. Soil Sci. Soc. Am. J., **52** : 1762–1770.

Wyllie, M.R.J. and Gardner, G.H.F. (1958) : The generalized Kozeney-Carman equation. World Oil, **146** : 210–228.

要　　旨

土壌の水分特性曲線と不飽和透水係数を連結させた数式モデルは，計測の手間を減らし，より少ないパラメータで簡便に保水性と透水性の両方を表現できるため，近年，様々な分野で広く用いられている。そのうち，現在最も頻繁に利用されている Mualem-van Genuchten モデルについて，Mualem（1976）と van Genuchten（1980）をレビューすることにより，その誘導過程と性質を解説し，加えて関連研究の成果についてまとめた。さらに van Genuchten の水分特性曲線関数の表記方法に関して検討を加え，n と α の代わりに m と Ψ_0（変曲点のマトリックポテンシャル水頭）を用いた表記がより適切であるとの考えを示した。

受稿年月日：2007年3月18日
受理年月日：2007年6月 6 日